









*[Faint, illegible handwriting in a cursive script, likely a historical document or manuscript.]*



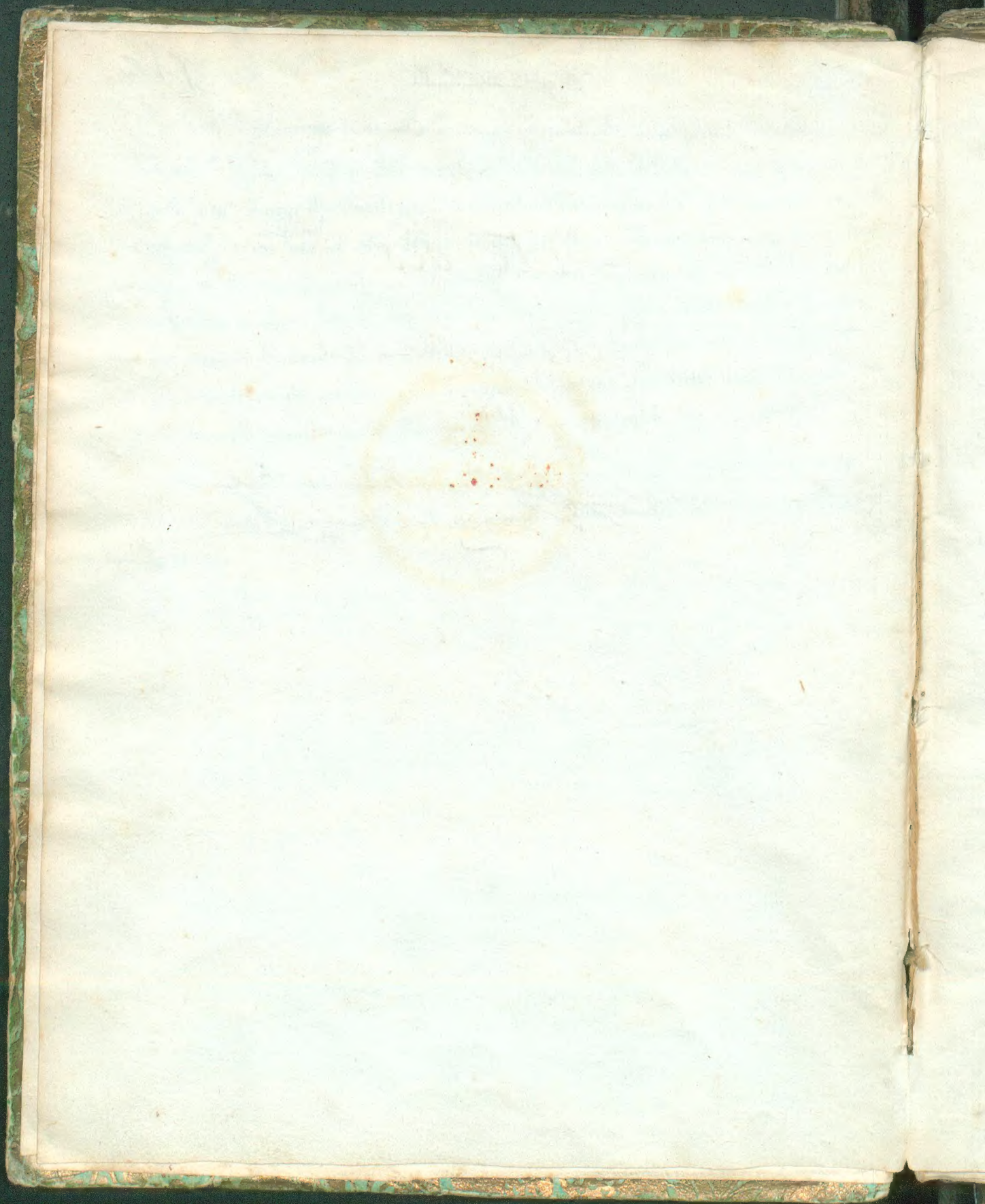
Il est parlé de cet ouvrage manuscrit, et de celui qui l'a précédé, dans la Correspondance du Roi avec M. Dalember. Voy. dans les Oeuv. Posth. de Frédéric II, tom. 14, les lettres de Dalember: p. 11, "ces élémens de philosophie"; p. 14, "l'ouvrage de philosophie que j'ai eu le bonheur de faire par ordre de V. M., m'a procuré de sa part une lettre etc." (c'est <sup>comme on voit</sup> ~~une lettre~~ cette même lettre du Roi, non imprimée, dont D'al. a inséré un passage dans le présent ouvrage, pag. 78-80); p. 15, "les questions que V. M. a la bonté de me faire" (ces questions que l'auteur traite ici); p. 20. 21, "les éclaircissemens qu'elle m'a demandés"; p. 15, "mon nouvel ouvrage". — La lettre du Roi, tome II, p. 5: "Je commence par vous remercier de votre ouvrage sur les hautes sciences, que je trouve admirable, parceque vous avez daigné descendre des régions éthérées pour vous rabaisser jusqu'à la conception des ignorans. J'appelle votre manuscrit mon guide-âne, et je me rengorge de comprendre quelque chose aux mystères que vous autres abozes cachez à la multitude."

Ces éclaircissemens ont été depuis insérés par l'auteur dans le tome 5<sup>me</sup> de ses Mélanges de Littér., d'Histoire, et de Philosophie; non tout-à-fait tels qu'ils furent présentés au Roi de Prusse, mais refondus: voy. l'Avertissement du volume nommé.



Suite des  
Eclaircissemens  
sur  
les Elémens de Philosophie







111

Sire,



Votre Majesté, par la lettre du 16 août  
dernier, m'a fait l'honneur de me proposer  
deux questions.

La première, comment on emploie l'analyse  
algébrique en Géométrie ?

La seconde, En quels cas on peut se servir de la  
métaphysique dans cette science, de même que les



cas ou l'application en est viciée ?

Des quatre sections que renferme ce petit volume, les deux dernières sont destinées à répondre à ces deux questions ; mais pour y satisfaire avec toute l'exactitude et toute la clarté qui a dépendu de moi, j'ai été obligé d'en faire précéder la solution par quelques réflexions générales sur les Elémens de Géométrie et d'Algebre. Il m'a paru nécessaire, afin de mieux remplir les vues de Votre Majesté, de répondre, pour ainsi dire, d'abord, à des questions qu'Elle ne m'a pas faites ; Heureux, si Elle juge ensuite que j'aye suffisamment



resolu celles sur lesquelles Elle desire plus parti-  
culièrement d'être éclaircie. Heureux du moins,  
si Votre Majesté daigne recevoir avec la bonté  
ordinaire ce nouvel Ouvrage, comme une marque  
de mon dévouement à ses ordres, & du très profond  
respect avec le quel je ferai toute ma vie

Sire

De Votre Majesté

Le très humble &

très/obéissant serviteur

D'Alembert

à Paris ce 8 Nov. 1764



## Table

§. XVI. Sur les Ellemens de  
Geometrie p. 1.

§. XVII. Sur les Ellemens  
d'algèbre p. 39.

§. XVIII. De l'application de l'algèbre  
à la Géométrie p. 63.

§. XIX. Sur l'usage et Sur l'abus  
de la métaphysique en Geometrie,  
& en général dans les sciences Ma-  
thématiques. p. 77.



1.

§. XVI. Sur les Eléments de  
Geometrie.

Nous avons déjà donné dans  
le §. IV de ces éclaircissemens une  
esquisse légère du plan suivant lequel  
ces éléments doivent être traités. Mais  
ce que nous en avons dit alors n'étoit  
que par forme d'exemple, et pour faire  
connoître par une espèce de tableau,  
emprunté de la science la plus exacte  
et la plus simple, les différents ordres  
de principes que les sciences renferment  
ou peuvent renfermer. Nous allons  
ici envisager les éléments de Geometrie  
pris en eux mêmes, et proposer quel-



-ques réflexions sur la meilleure  
manière de les traiter, et sur les  
inconveniens ou l'on peut tomber  
à ce sujet.

On se plaint et avec raison  
de la disette réelle ou nous sou-  
men de bonne éducation de cette  
science, au milieu de la malheu-  
reuse et stérile abondance d'ouura-  
ges dont nous sommes inondés  
en cette partie. Tous les défauts  
qu'on reproche à ces ouvrages se  
réduisent presque uniquement à  
un seul qui en est la source commune;  
à ce que les idées n'y sont pas pla-  
cées dans l'ordre naturel qui leur



convient. L'aolà il arrive, ou qu'on  
suppose ce qui auroit besoin d'être  
démontré ou qu'on prouve d'une ma-  
nière peu rigoureuse ce qui devoit et  
pourroit être démontré en rigueur, ou  
qu'on démontre par des voyes la-  
borieuses et quelque fois insuffisan-  
tes, ce qui pourroit être démontré  
avec beaucoup plus de simplicité.

Pour placer les idées dans  
l'ordre naturel, il faut surtout se  
rendre attentif aux définitions, non  
seulement en y mettant toute la provi-  
sion possible (ce qui n'a pas besoin d'être  
recommandé) mais en ne renfermant  
pas dans la définition, des vérités



4  
qu'elle ne doit pas contenir, et qui  
doivent en être la conséquence. Un  
exemple fera sentir parfaitement  
la nécessité du précepte que nous  
donnons ici, et les inconvénients  
auxquels on s'expose en s'en écartant.

Si je veux définir les parallèles,  
voici, ce me semble, comment je  
dois m'y prendre pour ne mettre  
dans cette définition que ce qu'elle  
doit absolument renfermer; je sup-  
poserai d'abord une ligne droite tirée  
à volonté; sur cette ligne j'élèverai,  
en deux points différens, deux per-  
pendiculaires, que je supposerai  
égales; et par l'extrémité de ces



perpendiculaires j'imaginerai une  
 ligne droite, que j'appellerai parallèle  
 à la ligne supposée. Il faudra deduire  
 de cette définition toutes les propriétés  
 des parallèles; car elles y sont neces-  
 sairement contenues; il faudra demon-  
 trer entre autres que la ligne parallèle  
 à la ligne supposée, et qui en est également  
 distante dans deux de ses points, a  
 tous ses autres points également dis-  
 tante de l'autre ligne; c'est à dire que  
 les perpendiculaires élevées en quelques  
 points que ce soit sur la ligne sup-  
 posée, et aboutissantes à la ligne paral-  
lèle, sont toutes égales aux deux per-  
 pendiculaires par l'extrémité desquelles



cette parallèle a été tirée. Supposez  
 cette vérité sans la démontrer, c'est  
 supposez ce que la définition ne  
 renferme et ne doit renfermer qu'im-  
 plicitement; car cette définition ne  
 suppose et ne doit supposer que  
 l'égalité des deux perpendicu-  
 laires, dont les extrémités suf-  
 fisent pour déterminer la position  
 de la parallèle; d'où il faut conclure  
 et prouver l'égalité de ces perpen-  
 diculaires avec toutes les autres.  
 J'ose avancer, et je ne crains point  
 d'être contredit par ceux qui y re-  
 fléchiront, que la proposition que  
 nous présentons à démontrer ici, et  
 en général la théorie des parallèles,



est un des points le plus difficile<sup>7</sup>  
dans les élémens de Geométrie; et  
j'ajoute que cette théorie seroit bien  
avancée par cette démonstration.

On parviendroit peut être plus  
facilement à la trouver, si on avoit  
une bonne définition de la ligne droite;  
par malheur cette définition nous  
manque. Il ne paroît pas possible  
d'en donner une autre que celle dont  
presque tous les mathématiciens font  
usage; mais cette définition, comme  
nous l'avons dit ailleurs,<sup>\*</sup> exprime  
plutôt une propriété de la ligne droite,  
que sa notion primitive. Ce n'est pas

\*Elem.  
de Phi-  
losophie  
p. 164.



que je veuille, avec quelqu'un  
 geometen, chercher cette notion  
 Dans l'idée que la vision nous  
 donne de la ligne droite, en nous  
 apprenant que les points de cette  
 ligne se couvrent les uns les  
 autres, lorsque l'œil se trouve placé  
 dans son prolongement. Cette  
 notion de la ligne droite seroit  
 très peu geométique 1.<sup>o</sup> par ce qu'il  
 y a des lignes droites pour un  
 aveugle, et que l'illustre Sanderson  
 enfant en avoit une idée très  
 distincte sans en avoir jamais  
 vu; 2.<sup>o</sup> par ce qu'il seroit impossible  
 de savoir que la lumière se repand  
 en ligne droite, si pour comencher



la rectitude d'une ligne, nous n'avons  
 d'autre moyen que d'examiner si les  
 points de cette ligne se cachent les  
 uns les autres quand l'œil est placé  
 dans son prolongement. Si la lumière  
 se propageoit en suivant une ligne  
 circulaire d'une courbure déterminée,  
 et que l'œil fut placé sur la circonfé-  
 rence d'un tel cercle; tous les points  
 de ce cercle se cacheroient les uns les  
 autres, et cependant la ligne sur  
 laquelle ils seroient placés ne seroit  
 pas droite.

On ne définiroit pas mieux la  
 ligne droite, en disant avec d'autres  
 auteurs que c'est une ligne dont tous  
 les points sont dans la même direction:



Car qu'est ce que Direction ? Et  
comment en peut on avoir l'idée  
si on n'a déjà celle de ligne Droite ?

On est donc comme forcé  
d'en revenir à la définition ordi-  
naire ; que la ligne Droite est  
celle qui est la plus courte d'un  
point à un autre ; mais il est  
aisé de sentir que cette définition  
n'est pas telle qu'on pourroit le  
desirer. En premier lieu. D'où sait-  
on que d'un point à un autre, il  
n'y a qu'un seul chemin qui soit  
le plus court ? Pourquoi ne pourroit  
il pas y en avoir plusieurs, tous  
différens, tous égaux, et tous les



11

plus courte? On n'est persuadé de la  
vérité contraire et on ne la suppose  
dans la Définition de la ligne droite,  
que par ce qu'on a déjà dans l'esprit  
ou plutôt dans la sens, si je puis  
parler de la sorte, une notion de la  
ligne droite qui renferme implicitement  
cette vérité. C'est cette notion qu'il  
faudrait exprimer; mais les termes en  
peut être les idées nous manquent  
pour cela. Hoc opus, hic labor est.

En second lieu; supposons qu'en  
effet la ligne droite soit le plus court  
chemin d'un point à un autre, que ce  
plus court chemin soit unique, et  
qu'il n'y en ait pas deux égaux; je



voir clairement comment on peut  
 conclure de là, que si on veut mener  
 une ligne droite d'un point à un  
 autre, tous les points par lesquels  
 doit passer cette ligne, sont neces-  
 sairement donnés, et que la ligne  
 qui joint deux quelconques de ces  
 points est aussi la plus courte  
 qu'on puisse mener ou imaginer  
 de l'un à l'autre. Mais je ne vois  
 plus avec la même évidence, en  
partant de la Définition supposée,  
 qu'une ligne droite tirée par deux  
 points ne puisse être prolongée que  
 d'une seule manière, ou ce qui revient  
 au même, que deux lignes droites,



tirés d'un même point à deux autres  
 points, ne puissent pas avoir une partie  
 commune; je ne dis pas que cela ne  
 soit évident; je dis (et je me flatte  
 qu'on en conviendra après y avoir  
 fait réflexion) que cela ne suit pas  
 évidemment de la Définition supposée,  
 mais d'une notion primitive de la ligne  
 droite que nous avons dans l'esprit  
 sans pouvoir en quelque façon la  
 rendre par des expressions; idée dont  
 la Définition supposée n'est que la  
 suite.

La 2<sup>e</sup> Définition et les propriétés de  
 la ligne droite ainsi que des lignes  
 parallèles, sont donc l'écueil, et pour



14  
ainsi dire, le scandale des élémens  
de Géométrie. Je ne crains point  
que les mathématiciens philosophes  
taxent de puerilité les réflexions  
que je viens de faire; puisqu'elles  
ont pour objet non seulement de  
porter la plus grande précision  
dans une science dont la précision  
est l'âme, mais de montrer par  
des exemples frappans la nécessité  
et la rareté des bonnes définitions.

On peut faire sentir l'un et  
l'autre par un nouvel exemple  
tiré des mêmes élémens de Geo-  
métrie, par la définition de l'angle.  
Pour s'en former une idée nette, il



faut nécessairement, et y faire entrer  
 l'idée de l'espace que l'angle renferme,  
 et en même temps borner cet espace, puis-  
 -qu'autrement la grandeur de l'angle  
 dépendroit de celle des lignes qui le  
 comprennent; ce qui est contraire à la  
 vraie notion qu'on doit s'en former. Il  
 faut donc supposer un arc de cercle  
 décrit du sommet de l'angle comme  
 centre, et d'un rayon pris à volonté,  
 mais qui soit toujours le même pour  
 quelque angle que ce soit; et on appel-  
 -lera angle l'espace terminé par cet  
 arc de cercle; par ce moyen on viendra  
 à bout de démontrer avec précision et  
 clarté toutes les propositions qui con-



cernent les angles. Remarquons  
 en passant que la mesure des angles  
 par les arcs de cercle décrits de leur  
 sommets, est fondée sur l'uniformité  
 du cercle, qui fait que toutes ses  
 parties sont semblables et toujours  
 disposées de la même manière par  
 rapport aux rayons qui y aboutis-  
 sent; cette uniformité, qui se prouve  
 par le principe de la superposition,  
 est un point sur lequel on n'appuie  
 peut être pas assez dans les élemen-  
 taires, et qui est pourtant le  
 principe fondamental de la théorie  
 des angles.

\* Voyez  
 sur ce prin-  
 cipe le  
 §. IV des  
 éclaircis-  
 sements  
 précédents.

Au reste la définition de l'angle



qu'on vient de donner, suppose que<sup>11</sup>  
les deux côtés de cet angle soient des  
lignes droites, et non une ligne droite  
et une ligne courbe; comme seroient un  
arc de cercle et sa tangente. Ce dernier  
angle, si on peut lui donner ce nom,  
a été le sujet d'une grande dispute  
entre les Geomètres, pour savoir s'il  
étoit comparable ou non à l'angle  
rectiligne, c'est à dire, <sup>à l'angle</sup> formé par des  
lignes droites; il est aisé de voir que  
ce n'en absolument qu'une question de  
nom. Tout dépend de l'idée qu'on attache  
en cette occasion au mot angle. Si on en-  
tend par ce mot une portion finie de l'espace  
compris entre la courbe et sa tangente, il



n'en pas douteux que cet espace ne  
 soit comparable à une portion finie  
 de celui qui est renfermé par deux  
 lignes droites qui se coupent. Si  
 on veut y attacher l'idée ordinaire de  
 l'angle formé par deux lignes droites,  
 on trouvera, pour peu qu'on y réflé-  
 -chisse, que cette idée prise absolument  
 et sans modification, ne peut convenir  
 à l'angle de contingence, parce que  
 dans l'angle de contingence une  
 des lignes qui le forme est courbe.  
 Il faudra donc donner pour cet  
 angle une définition particulière;  
 et cette définition, qui est arbitraire,  
 étant une fois bien fixée, il ne pourra

plus y avoir de difficulté sur la question  
 dont il s'agit. Une bonne preuve que  
 cette question est purement de nom, c'est  
 que les Géomètres sont d'ailleurs entiè-  
 rement d'accord sur toutes les proprié-  
 tés qu'ils démontrent de l'angle de  
 contingence; qu'entre un cercle et sa  
 tangente, on ne peut faire passer de  
 lignes droites; qu'on y peut faire passer  
 une infinité de lignes circulaires, et  
 ainsi du reste. Il en est à peu près de  
 la querelle sur l'angle de contingence, comme  
 de la fameuse question des forces vives,  
 où on ne dispute que faute de s'entendre\*, et

---

\* V. Eléments de Philosophie art. de la Mécanique  
 page 203.



ou tout le monde en d'accord sur  
le fond en différant dans les termes;  
et c'en a peu près ce qu'on doit pen-  
ser de toutes les discussions metaphy-  
siques qui partagent quelquefois  
les mechaniciens et les Geometres.

Si on doit s'attacher dans  
les élémens de geometrie, à ne  
mettre dans les définitions que ce  
qui y est nécessaire, pour donner  
plus de précision et de rigueur  
aux propositions qu'on en déduit,  
il en est un autre écueil qu'on doit éviter  
avec soin, c'est celui de ne pas  
développer suffisamment l'idée qu'on  
doit attacher à certaines expressions.

La Geometrie, meme élémentaire, et  
 toutes les parties des mathématiques  
 font souvent usage d'expressions de  
 cette espece, qui dans le sens meta-  
 -physique qu'elle presentent, paroiss-  
 -sent d'abord peu exactes; mais  
 qui ne doivent être regardées que  
 comme des manieres abrégées de  
 s'exprimer, que les mathématiciens  
 ont inventées pour enoncer une vérité  
 dont le développement et l'énoncé  
 exact auroit demandé beaucoup plus  
 de mots. Il faut donc avant que  
 de faire usage de ces expressions, fixer  
 d'une maniere nette et précise, la notion  
 qu'elles renferment.



\* On dit, par exemple, qu'un parallélogramme est le produit de la base par sa hauteur. Que signifie cette proposition? Qu'est-ce que le produit de la base par la hauteur, c'est à dire la multiplication d'une ligne par une autre? Est-ce qu'on multiplie des lignes par des lignes? Non certainement; car dans toute multiplication une des deux quantités au moins doit être un

---

\* Ceci se trouve déjà dans la section sur les principes métaphysiques du calcul infinitesimal, mais on a cru devoir le reporter ici, ou en sa véritable place.

nombre abstrait; multiplier c'est prendre  
 un certain nombre de fois une certaine  
 chose ou un certain nombre de choses;  
 on peut multiplier une ligne par un  
 nombre, par exemple par 3, ce qui  
 signifie qu'on prendra cette ligne  
 trois fois, mais on ne multiplie point  
 une ligne par une ligne; cette opération  
 ne présente aucune idée nette. Quelque  
 Mathématicien, il est vrai, ont dit

que la multiplication d'une ligne par  
 une ligne consistoit à prendre une de  
 ces lignes autant de fois qu'il y a de  
 points dans l'autre; ce qui produit  
 une surface. Mais cette notion est  
 sujette à beaucoup de difficultés. Elle



Suppose que la surface est composée  
 de lignes, et la ligne de points;  
 elle suppose que pour prendre une  
 ligne autant de fois qu'il y a  
 de points dans une autre, il  
 faut que cette autre ligne soit  
 élevée perpendiculairement sur  
 la 1.<sup>re</sup>; car si le côté d'un parallé-  
 logramme n'est pas perpendiculaire  
 à la base, alors le parallélogramme  
 n'est plus le produit du côté par  
 la base; cependant suivant les  
 notions que se forment de la surface  
 les mathématiciens que nous com-  
 battons, on ne peut disconvenir que  
 dans la surface du parallélogramme

La base ne se trouve répétée autant de  
 fois que le côté a de points; à moins  
 qu'on ne veuille admettre dans une ligne  
 des points plus grands les uns que  
 les autres, ce qui jette dans de nouvelles  
 absurdités. Que signifie donc cette  
 proposition, qu'un parallélogramme  
 rectangle en le produit de sa base  
 par sa hauteur? Elle signifie que si  
 on suppose la base divisée en un certain  
 nombre de petites parties égales, par  
 exemple de pouces ou de lignes, et  
 la hauteur en un certain nombre de  
 mêmes parties égales: c'est à dire de  
 pouces ou de lignes, le rapport du  
 parallélogramme rectangle au carré



De chacune de ses parties, sera égal  
au rapport que le produit des deux  
nombres de division de la base et  
de la hauteur aura avec l'unité.

Par exemple, supposons la base  
divisée en 100 lignes ou pouces,  
et la hauteur en 25; le produit de  
ces deux nombres, qui est 2500,  
c'est à dire le rapport de ce nombre  
à l'unité, exprimera le rapport du  
parallélogramme rectangle au quarré  
fait d'une ligne ou d'un pouce; ce  
parallélogramme contenant en effet  
2500 petits quarrés d'un pouce ou  
d'une ligne. Ainsi, dire qu'un pa-  
-rallélogramme est le produit de

27.  
sa base par sa hauteur, c'est une  
manière abrégée d'exprimer la propo-  
sition que nous venons d'énoncer, et  
donc l'énonciation rigoureuse et de-  
veloppée auroit demandé trop d'étendue  
et de circonlocution; dans les sciences  
on peut se servir utilement de ces  
sortes d'expressions abrégées, quoique  
peu exactes en elles mêmes; je dirais  
on a besoin pour ne point trop fatiguer  
l'esprit, de s'en servir souvent, pourvu  
qu'on ait soin de bien fixer le sens  
précis qui doit y être attaché. C'en  
par malheur ce qu'on ne fait pas  
toujours, et ce qui peut quelque fois  
être reproché aux Géomètres mêmes.



Il est aisé de conclure de  
 cet exemple et de plusieurs autres  
 qu'on pourroit y joindre, que le  
 mot de mesure en mathématique,  
 renferme l'idée d'un rapport  
 implicitement exprimé. Or il est  
 certains rapports qui offrent plus  
 de difficulté que les autres, soit  
 pour en présenter la notion d'une  
 manière bien nette, soit pour les  
 démontrer d'une manière rigoureuse;  
 ce sont les rapports des quantités  
 incommensurables. On dit, par  
 exemple, que la Diagonale du carré  
 est à son côté comme la racine  
 carrée de 2 est à 1; pour avoir une

idée bien nette de la vérité que cette  
 proposition exprime, il faut d'abord  
 remarquer qu'il n'y a point de racine  
 quarrée du nombre 2; ni par conséquent  
 de rapport proprement dit entre cette  
 racine et l'unité; ni par conséquent  
 de rapport proprement dit entre la  
 diagonale et le côté d'un quarré; ni  
 par conséquent enfin d'égalité entre  
 ces rapports, puisqu'il n'y a point  
 proprement d'égalité entre des rapports  
 qui n'existent pas. Mais il faut re-  
 marquer en même temps, que si on ne  
 peut trouver un nombre, qui multiplié  
 par lui même produise 2, on peut trou-  
 ver des nombres qui multipliés



par eux mêmes produisent un  
 nombre aussi approchant de 2 qu'on  
 voudra; soit en dessus, soit en  
 dessous. Or si on a deux nombres  
 quelconques dont l'un donne un  
 carré plus grand que 2, mais  
 avec si peu de différence qu'on  
 voudra, et l'autre un carré plus  
 petit que 2, avec si peu de diffé-  
 rence qu'on voudra, une ligne  
 qui auroit avec le côté du carré  
 un rapport exprimé par le 1.<sup>er</sup> de  
 ces nombres seroit toujours  
 plus grande que la diagonale,  
 et une ligne qui auroit avec le  
 même côté du carré un rapport

exprimé par le second nombre, seroit  
plus petite que la même diagonale.  
Voilà le développement de cette proposi-  
tion, que la diagonale est au côté du  
quarré comme la racine quarrée de 2 en  
à 1. Il en est de même de toutes les  
autres propositions qui regardent des  
rapports incommensurables, et cela  
suffit pour faire voir quel sens précie-  
ux y doit attacher.

Cette facilité qu'on a de représenter  
les rapports incommensurables, non par  
des nombres exacts, mais par des  
nombres qui en approchent aussi près  
qu'on voudra sans jamais représenter  
rigoureusement ces rapports, est cause



que les mathématiciens ont étendu  
 la dénomination de nombre aux  
 rapports incommensurables, quoi-  
 qu'elle ne leur appartienne qu'im-  
 proprement, puisque les mots  
nombre et nombre supposent une  
 désignation exacte et précise, dont  
 ces sortes de rapports ne sont pas  
 susceptibles; aussi n'y a-t-il pro-  
 prement que deux sortes de  
 nombres, les nombres entiers  
 comme 2, 3, 4, &c. Et les nombres  
rompus ou fractionnaires, comme  $\frac{1}{2}$ .  
 $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , &c. Ou  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{5}{7}$ , &c. Les premiers  
 représentent les rapports de deux  
 grandeurs dont l'une contient l'autre

une certaine quantité de fois exactement,  
 donne 2 fois, 3 fois, 4 fois; les seconds  
 expriment le rapport de deux grandeurs  
 dont l'une contient exactement, une  
 certaine quantité de fois, la moitié, le  
 tiers, le quart, le 5.<sup>ème</sup> de l'autre et  
 ainsi de suite; les rapports représentés  
 par des nombres rompus peuvent  
 même se réduire très aisément à des  
 rapports représentés par des nombres  
 entiers; car quand je dis, par exemple,  
 qu'une ligne est les  $\frac{3}{4}$  d'une autre ligne,  
 c'est comme si je disois que la première  
 ligne est à la seconde dans le rapport  
 du nombre entier 3 au nombre entier 4.



Delà il en aise' devoir, que  
 si les rapports incommensurables  
 sont regardés comme des nombres,  
 c'en par la raison que s'ils ne sou-  
 draient des nombres proprement dits,  
 il ne s'en faut rien, pour ainsi dire,  
 qu'ils n'en soient réellement, la  
 différence d'un rapport incommen-  
 surable à un nombre proprement dit,  
 pouvant être aussi petite qu'on  
 voudra.

Deux autres raisons ont fait  
 ranger les rapports incommensurables  
 parmi les nombres; la première  
 est que ces rapports ont plusieurs  
 propriétés qui leur sont communes

avec les nombres, et peuvent être soumis  
à plusieurs égards à un calcul semblable  
à celui des nombres; comme nous le  
verrons plus en détail dans les deux  
§. suivantes; la seconde, c'est que si  
on veut donner au mot nombre une  
idée plus étendue que celle qu'on lui  
donne ordinairement, et qui ne renferme  
proprement que les nombres entiers et  
les fractions, alors les rapports in-  
commensurables peuvent y être compris,  
puisque ces rapports, quoiqu'ils ne  
puissent pas être désignés rigoureusement  
par l'arithmétique, peuvent être, si non  
exprimés, au moins représentés par la  
géométrie; par exemple, le rapport de la



racine quarrée de 2 à l'unité, qui  
 ne peut être exprimée arithmétique-  
 -ment, peut être représentée géomé-  
 -triquement par le rapport de la  
 diagonale du quarré à son côté;  
 il en est de même d'une infinité  
 d'autres rapports incommensurables,  
 que la géométrie représente aisément  
 par les rapports de certaines  
 lignes; par exemple, la racine  
 quarrée de 3 peut être représentée  
 par le rapport du double de la  
 hauteur d'un triangle équilatéral  
 au côté du même triangle; celle de  
 5 par le rapport de la diagonale  
 d'un parallélogramme rectangle

au petit côté' De ce même parallélogramme,  
 en supposant la base double de la  
 hauteur; et ainsi de mille autres exem-  
 -ples de cette espèce qu'on pourroit  
 multiplier à l'infini. Cette remarque  
 sur la possibilité de représenter les  
 rapports incommensurables par la  
 géométrie nous sera utile dans la suite  
 pour faire connoître quelle est l'utilité  
 de l'application de l'analyse à cette  
 science.



*[Faint handwritten notes at the bottom of the page]*

§.XVII. Des Elémens d'algèbre.

39.

L'imperfection que nous avons remarquée dans plusieurs des notions que donne pour l'ordinaire les élémens de Géométrie, ne se rencontre gueres moins dans celles que présentent la plus part des élémens d'algèbre; quelques exemples en seront la preuve.

La 1<sup>re</sup> et en un sens la plus essentielle des Définitions que ces élémens doivent offrir, est celle de l'algèbre même. Il semble que les auteurs d'élémens se soient mis à peine de donner une idée nette de la nature de cette science et de son objet; les uns



Disent que c'est l'art de faire sur  
les lettres de l'alphabet les mêmes  
operations qu'on fait sur les chiffres;  
Définition ridicule à tous égards.

Les autres se bornent à dire que  
c'est la science du calcul des  
grandeurs en general, Définition  
plus exacte, mais qui a besoin  
d'être plus développée qu'elle ne  
l'est ordinairement par les auteurs  
élémentaires.

Il faut d'abord partir de ce  
principe, que le calcul des grandeurs  
ne peut consister qu'à déterminer  
le rapport des grandeurs entre elles;  
or il y a comme nous l'avons vu à

la fin du §. précédent, Deux sortes  
 de rapports; les uns qui peuvent être  
 exprimés exactement par des nombres,  
 soit entiers, soit rompus; les autres  
 qu'on appelle incommensurables, et qui  
 ne peuvent être exprimés par des  
 nombres que d'une manière approchée,  
 mais qui peuvent être représentés, ou  
 qu'on peut imaginer être représentés  
 d'une autre manière, par exemple  
 par le rapport d'une ligne à une autre.  
 Nous allons faire voir d'abord qu'elle est  
 l'utilité des caractères algébriques  
 pour représenter les nombres proprement  
 dits, et les rapports qu'ils expriment;  
 nous verrons en suite l'utilité de ces



même caractères pour représenter  
les rapports incommensurables.

Pour sentir quel est l'avantage  
d'exprimer les nombres par des  
caractères algébriques, il faut  
remarquer que l'arithmétique  
ordinaire a deux sortes de principes;  
les uns sont dépendants des  
signes ou chiffres par lesquels  
on exprime les nombres, et ce sont  
eux qu'on appelle proprement règles  
de l'arithmétique; règles qui sont  
attachées à la nature de ces signes,  
et qui seroient différentes, si au lieu  
de 10 caractères dont nous nous  
servons pour exprimer tous les

nombres possibles, nous en avons  
 un plus grand ou un plus petit nom-  
 bre, ou si au lieu de disposer ces carac-  
 tères comme nous le faisons pour  
 exprimer les nombres, nous les dispo-  
 sions autrement, et que par là nous  
 changions et leur valeur intrinse-  
 que et leur valeur relative. Mais outre  
 les principes sur lesquels sont fondées  
 ces règles, l'arithmétique en a d'autres  
 plus générales, indépendantes des signes  
 par lesquels on peut exprimer les  
 nombres, et uniquement attachés à la  
 nature des nombres même; tels sont  
 ceux-ci;

Si on retranche un plus petit nombre



D'un plus grand, et qu'on ajoute.  
au plus petit nombre ce qui resul-  
tera de cette operation, on aura le  
plus grand nombre;

Le produit de deux nombres,  
divisé par l'un des deux produisant,  
Donne l'autre produisant;

Le produit du quotient d'une  
Division par le Diviseur doit rendre  
le Dividende &c. et ainsi du reste.

Ces sortes de principes n'étant  
proprement que des propriétés  
générales des rapports ou des  
nombres, qui ont lieu pour quelque  
nombres que ce soit, et de quelque  
manière que ces nombres soient  
désignés; il sensuit d'abord que ces

propositiones generales peuvent être  
 mises sous les yeux de la manière  
 la plus claire et la plus simple, en  
 supposant les nombres représentés  
 par des caractères généraux; on  
 a choisi pour exprimer ces caractères  
 les lettres de l'alphabet, comme étant  
 plus communes, et d'un usage plus  
 familier et plus universel. Première  
 utilité de l'algèbre, de servir à repré-  
 senter et à démontrer d'une manière sim-  
 ple et facile les vérités qui ont rap-  
 port aux propriétés générales des  
 nombres.

Ce n'est pas tout. Comme il y  
 a des propriétés générales des nombres,



46  
indépendantes de la manière -  
dont ils sont exprimés, il doit y  
avoir aussi pour le calcul des  
nombres, des principes généraux,  
par le moyen desquels on pourra  
exprimer de la manière la plus  
simple et la plus abrégée qu'il  
sera possible le résultat de la  
combinaison de ces nombres, et  
des opérations qui seront la suite  
de cette combinaison. Les règles  
pour trouver ce résultat sont les  
règles de l'algèbre. Ainsi l'addition  
algébrique n'est autre chose que le  
moyen d'exprimer de la manière  
la plus courte et la plus simple

47

le resultat de l'addition de plusieurs  
nombres, en ne donnant à ces nombres  
aucune valeur particuliere; il en est de  
même de la soustraction, et des autres  
regles.

La utilité de ces regles ne se  
borne pas à représenter de la maniere  
la plus simple le resultat des operations  
qu'on peut faire sur les nombres en  
general. Supposons qu'un ou plusieurs  
nombres, ou en general une ou plusieurs  
quantités (car on a déjà dit que  
toute quantité pourroit être représentée  
par un nombre) soient exprimés par des  
caracteres algebriques; supposons de  
plus que ces nombres soient connus



et Donnée, et qu'on propose de trouver  
 un ou plusieurs autres nombres qui  
 dépendent des nombres Donnée par  
 de certaines conditions; il est visible  
 1.<sup>o</sup> que par la généralité des caractères  
 algébriques, on peut exprimer ces  
 conditions supposées entre les  
 nombres cherchés et les nombres  
 Donnée. 2.<sup>o</sup> que par la généralité  
 des opérations algébriques, on  
 pourra pratiquer également ces  
 opérations sur les nombres cher-  
 chés comme sur les nombres Donnée.  
 Or en vertu de ces opérations l'algèbre  
 enseigne à dégager les nombres  
 cherchés d'avec les nombres Donnée,

49.

en sorte qu'on ait la valeur de  
première exprimée de la manière la  
plus simple par un résultat qui ne  
contiendra plus que les seconds; et  
les opérations que ce résultat indique  
étant pratiquées sur tel nombre  
qu'on voudra, pris à volonté, donne-  
ront la valeur de ces nombres cherchés  
qui seront relatifs à ces nombres pris  
à volonté, suivant les conditions exi-  
gées et proposées.

Je ne sais si est possible de  
donner une notion plus nette de  
l'algèbre à ceux qui n'en ont aucune;  
peut être ce qu'on vient de dire ne sera



til par encore assez développé  
 pour eux; mais peut être en-il  
 nécessaire d'être au moins initié  
 dans cette science pour pouvoir  
 s'en former une idée précise; je  
 ne doute point que ceux qui seront  
 dans ce dernier cas ne trouvent  
 juste et exacte celle que nous  
 venons d'exposer. C'est sans  
 doute d'après une notion sem-  
 -blable que newton a donné  
 à l'algebre le nom d'arithmétique  
universelle<sup>re</sup>; Denomination qui en  
 effet exprime et renferme ce que  
 nous venons de dire sur la véritable

objet et la nature de cette science.

Après avoir fait sentir l'utilité  
des caractères algébriques pour exprimer  
les nombres proprement dits,  
il sera plus facile encore d'en faire  
sentir l'utilité pour exprimer les  
rapports incommensurables. En premier  
lieu ces rapports ont, pour ainsi dire,  
un droit de plus que les nombres, à  
pouvoir être représentés par des caractères  
algébriques; puis que ces caractères  
n'ayant point, comme les nombres, de  
valeur fixe et déterminée, n'en sont  
que plus propres à désigner des rapports  
qui ne peuvent être exprimés exactement



par des nombres ; En second lieu ,  
 les principes généraux énoncés  
 ou indiqués ci dessus, sur les  
 propriétés générales des nombres  
 et sur les résultats du calcul qu'on  
 en peut faire, principes qui  
 servent de base, comme nous l'avons  
 dit, au calcul algébrique, ont éga-  
 lement lieu pour les rapports  
 incommensurables. De même  
 par exemple, qu'on double,  
 qu'on triple, qu'on quadruple &c.  
 Un nombre en le multipliant par  
 2, par 3, par 4 &c, on double on  
 triple, on quadruple &c un rapport

incommensurable en le multipliant  
 par 2, par 3, par 4 &c; on le réduit  
 pareillement ainsi que tout nombre, à  
 la moitié, au tiers, au quart, en le  
 divisant par 2, par 3, par 4 &c; il  
 en est de même d'une infinité d'autres  
 vérités semblables, également communes  
 à toutes sortes de rapports, soit ex-  
 primables par des nombres, soit in-  
 commensurables; En un mot toutes les  
 vérités sur les nombres, lesquelles ne  
 supposent pas ou l'idée de nombres  
 entiers en général, ou celle de tel nombre  
 en particulier, ou la manière d'écrire et  
 de désigner les nombres par notre



calcul arithmétique et Decimal,  
 toutes ces vérités auront également  
 lieu pour les rapports incommensurables. Le calcul algébrique, qui ne considère les rapports et les nombres que de la manière la plus générale et la plus abstraite, s'étend donc et s'applique aux rapports incommensurables, et même encore plus parfaitement à ces rapports qu'aux nombres proprement dits; et sous ce nouveau point de vue, il mérite encore à plus juste titre le nom d'arithmétique universelle.

55.  
Nous verrons dans le §. suivant,  
d'après les notions que nous venons  
de donner de l'algèbre, comment elle  
s'applique à la géométrie; mais avant  
de finir, exposons encore quelques-unes  
des fausses idées qu'on peut reprocher  
au commun des algébristes. Elles  
serviront, pour ainsi dire, de preuves  
justificatives apportées d'avance de  
ce que nous dirons dans le dernier  
des §. suivants, sur l'abus de la  
métaphysique en géométrie, et surtout  
en algèbre; et les idées nettes et pures  
que nous tâcherons ici de substituer à  
ces idées fausses, pourront monter en



même temps un essai de la vraie  
 métaphysique. Tous ces sciences  
 sont susceptibles.

Les auteurs ordinaires d'élé-  
 -ments ne pechent pas seulement  
 par le peu de soins qu'ils ont  
 de donner une idée nette de l'al-  
 -gebre et de son but; mais encore  
 par le peu d'exactitude des  
 notions qu'ils attachent à certaines  
 expressions. Pour abréger je me  
 bornerai à la notion des quantités  
 négatives. Les uns regardent  
 ces quantités comme au dessous  
de rien, notion absurde en elle  
 même; les autres comme exprimant

Des Dettes, notion trop bornée et  
 par cela seul peu exacte; les autres  
 comme des quantités qui doivent  
 être prises dans un sens contraire aux  
 quantités qu'on a supposées positives;  
 notion dont la géométrie fournit aisé-  
 -ment des exemples, mais qui en  
 sujette à de fréquentes exceptions; —  
 puisqu'il est aisé de faire voir par  
 des exemples tirés aussi de la géomé-  
 -trie, que des quantités représentées  
 par le calcul avec le signe négatif,  
 doivent quelquefois être prises du  
 même sens que les quantités carac-  
 -térisées par le signe positif. Quest ce  
 donc que les quantités négatives? Il



enfants distinguer de deux  
especes.

Les premieres par leur  
signe negatif indiquent une  
fausse supposition qui a été  
faite dans l'enoncé du probleme,  
supposition redressée par la  
solution. Si on demande un  
nombre qui ajouté à 20 fasse  
15, on trouvera, avec le signe  
negatif, ce qui marque qu'il  
auroit fallu énoncer le probleme  
en cette sorte; trouver un nombre  
tel qu'étant retranché de 20, en  
non ajouté, le resultat de l'opera-  
tion soit 15. En voila autant

qu'il est nécessaire pour donner ici  
la vraie notion de cette première espèce  
de quantités négatives, qui se rencontrent  
à tous momens dans les  
solutions de problèmes.

La seconde espèce de quantités  
négatives, se rencontre principalement  
dans les problèmes, où le résultat du  
calcul paroît présenter plusieurs solu-  
tions; elle indique alors des  
solutions du même problème, envisagé  
sous un point de vue un peu différent  
de celui que l'énoncé suppose, mais  
toujours analogue à ce premier sens.

Ces quantités négatives de la  
première espèce montrent la généralité et



l'avantage du calcul algebrique,  
 qui redresse, pour ainsi dire, le  
 calculateur en partant de la  
 supposition même qui auroit  
 dû l'égare. Les quantités  
 négatives de la seconde espèce  
 montrent tout à la fois et la  
 richesse de cette science qui fait  
 trouver dans la solution du  
 problème, jusqu'aux choses qu'on  
 ne demandoit pas, et en même  
 temps, si on ose le dire, l'imperfec-  
 tion du calcul, qui, en donnant  
 sans qu'on le cherche ce qu'on ne  
 lui demande point, ne donne pas  
 toujours ce qu'on lui demande.

avec toute la perfection qu'on pourroit  
exiger. C'est ce qui n'arrive que trop  
dans les questions algebriques; la  
solution d'un probleme qui n'en a  
quelque fois réellement qu'une  
seule possible, dans le sens ou il a  
été proposé, est souvent incorporée et  
comme amalgamée avec plusieurs  
autres solutions de problemes ana-  
logues, mais differens; solutions qui  
enveloppant et masquant, pour ainsi  
dire, la premiere, la rendent plus  
difficile à découvrir. Ceux qui ont  
quelque connoissance de ce qu'on appelle  
en algebre la theorie des équations,  
savent par experience la verité de ce



que nous venons de dire; mais  
en voilà assez sur ce sujet, pour  
ne pas rebuter ceux de nos  
lecteurs à qui les éléments  
de cette science sont absolument  
inconnus.

63.

S. XVIII. De l'application de l'algebre  
à la géométrie.

Pour se faire une idée de cette  
application et en comprendre les  
avantages, Il faut se rappeler les  
principes suivans.

La Géométrie est, comme nous  
l'avons dit ailleurs, \* la science des  
propriétés de l'étendue, considérée sim-  
plement en tant qu'étendue et figurée.

Ces propriétés consistent en grande  
partie dans le rapport qu'ont entre elles  
les différentes parties de l'étendue figurée.

\* Elementa de Philosophia T. IV. p. 158.



L'un des conséquens un des grands —  
objets de la géométrie est de connoître  
et de calculer le rapport des  
lignes les unes avec les autres,  
celui des surfaces entr'elles, et  
celui des solides entr'eux.

Ces rapports peuvent être,  
ou exprimés par des nombres,  
ou incommensurables.

Ces rapports des surfaces, ou  
pour abréger les surfaces mêmes,  
peuvent être représentés comme  
nous l'avons expliqué plus haut,  
par le produit de deux lignes, en  
regardant ces lignes comme ex-  
primées par des nombres qui en

indiquent le rapport.

Il n'est pas même nécessaire que le rapport de ces lignes soit commensurable; et quelque'il soit, le produit des quantités qui expriment ce rapport représentera la surface.

De même et par la même raison un solide ou corps géométrique, ayant les trois Dimensions, c'est à dire des quantités dont le rapport soit le même que celui de ces lignes.

Or les caractères algébriques désignant également bien, soit le nombre, soit le rapport incommensurable, comme on l'a vu cy dessus; ces



caractères peuvent servir parfai-  
-tement à représenter les lignes,  
en sorte que le produit de deux  
caractères algebriques peut  
exprimer une surface, celui de  
3 un solide &c.

Par conséquent les opérations  
qu'on pourra faire sur ces carac-  
-tères, les rapports qu'on y de-  
-couvrira, en un mot les vérités  
qu'on pourra tirer de leur com-  
-binaison par des opérations  
algebriques, exprimerons, étant  
traduites du langage algebrique  
en langage geometrique, des  
vérités qui seront relatives au

67  
rapport des lignes, des surfaces  
et des solides.

Par la même raison les opérations  
algébriques qui servent à résoudre  
les questions qu'on peut proposer sur  
les nombres, serviront de même à  
résoudre les questions géométriques,  
qu'on peut proposer sur le rapport des  
lignes, des surfaces et des solides;  
et par conséquent en général à  
résoudre la plus part des questions  
qui ont rapport à cette science. En effet  
ces questions analysées se réduisent  
pour l'ordinaire à trouver certains  
rapports entre certaines lignes, certaines  
surfaces, certains solides; puisque

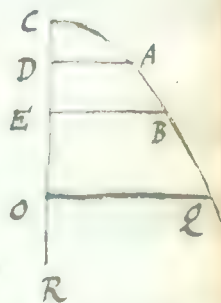


la plus part des propriétés  
 des figures consistent ou dans  
 le rapport qu'il y a entre  
 quelque une de leurs parties,  
 déterminées d'une certaine  
 manière, ou dans le rapport  
 de certaines lignes tirées dans  
 ces figures, ou dans le rapport  
 de ces figures, prises dans leur  
 entier ou par parties, avec d'autres  
 figures aussi prises dans leur  
 entier ou par parties; et ainsi de  
 reste.

Toutes ces considérations  
 suffiroient pour faire sentir l'usage  
 et l'utilité de l'application de

l'algebre à la geometrie; mais il est surtout une branche de cette science, ou l'analyse algebrigue est extrêmement utile, c'est la theorie des courbes.

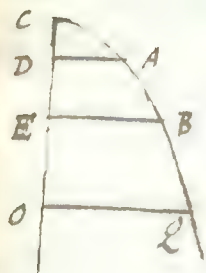
Pour s'en convaincre il faut considerer d'abord la maniere dont on determine la nature d'une courbe; on rapporte les points de cette courbe  $CABQ$  par des perpendiculaires  $AD, BE, QO$ , qu'on appelle ordonnées, à une ligne droite fixe et infinie  $CR$  tirée dans le plan de cette courbe, et sur laquelle les lignes  $AD, BE, QO$ , sont perpendiculaires; les





70.

parties  $CD, CE, CO$ , de la ligne  $CR$  s'appellent les abscisses.



On sent bien que puisque la nature de la courbe  $CABQ$  est déterminée, la longueur de chaque ordonnée  $DA$  doit être déterminée par rapport à l'abscisse correspondante  $CD$ , puisque c'est la longueur plus ou moins grande  $DA$  de cette ordonnée qui donne par son extrémité le point correspondant  $A$  de la courbe. La nature de la courbe consiste donc dans un certain rapport, une certaine loi qui s'observe entre

71

chaque ordonnée comme  $DA$ ,  
 et l'abscisse  $CD$  correspondante.  
 Par exemple dans la courbe  
 appelée parabole le quarré de chaque  
 ordonnée est égal au parallélogramme  
rectangle qui auroit pour hauteur  
 l'abscisse correspondante et pour  
 base une ligne toujours la même  
 appelée parametre; si donc on suppose  
 que cette ligne toujours la même soit  
 appelée  $a$ , que chaque abscisse soit  
 appelée  $x$ , et l'ordonnée correspon-  
 dante  $y$ , le quarré de  $y$  sera égale  
 au produit de  $a$  par  $x$ , ce qui s'exprime  
 algébriquement en cette sorte  $yy = ax$ . C'est

\* Cette marque  $=$  est le signe de l'égalité, et signifie égale.



la ce qu'on appelle l'équation  
de la courbe, dont tous les  
 points, comme l'on voit, sont  
 déterminés par cette équation.  
 Il en est de même de toutes les  
 autres courbes; elles ont chacune  
 leur équation particulière qui  
 sert à déterminer leurs points;  
 et ces équations, dont l'invention  
 est due à Descartes, sont une  
 des branches les plus belles et  
 les plus fécondes de l'applica-  
 tion de l'algèbre à la géométrie.

C'est l'équation entre les  
 $y$  et les  $x$ , c'est à dire entre

73.

les ordonnées et les abscisses, l'al-  
-gebre enseigne a en deduire l'equa-  
-tion entre les Differences des  
abscisses et celles des ordonnées;  
or nous avons montre dans la section  
sur les principes metaphysiques  
Du calcul infinitesimal, comment  
la connoissance du rapport entre  
ces Differences donne la limite de  
ce rapport, comment cette limite  
donne les tangentes de la courbe,  
et en general comment ce calcul  
des limites des rapports est la  
clef du calcul Differential et integral.  
Nous n'en pourrions dire davantage,



ni nous faire entendre sur les  
Détails ou nous extérieurs à ce  
sujet, sans donner un traité complet  
d'algèbre, de Géométrie, et de  
calcul infinitésimal, ce qui n'est  
pas ici notre objet, et qui a d'ailleurs  
été exécuté dans un grand nombre  
d'ouvrages. Ce que nous nous  
sommes proposé ici, c'est seulement  
de présenter sur l'algèbre et son  
application à la Géométrie des  
notions simples, nettes et précises,  
à des personnes aussi respec-  
tables qu'éclairées, à qui d'autres  
occupations ne permettent pas de  
s'appliquer à ces sciences et d'en

75  
faire leur objet; nous voyons que  
le peu que nous avons dit suffira  
pour leur donner ces notions et pour  
leur faire sentir l'usage et l'utilité  
de l'analyse mathématique dans  
la science des propriétés de l'étendue.



76

Small 20/100

20/100

20/100

20/100

20/100

20/100

77

V. XIX. Sur l'usage et sur l'abus  
de la métaphysique en géométrie  
et en général dans les sciences  
mathématiques.

La métaphysique, selon le  
point de vue sous lequel on l'envisage,  
est la plus satisfaisante ou la plus futile  
des connaissances humaines; la plus  
satisfaisante quand elle ne considère  
que des objets qui sont à sa portée,  
qu'elle les analyse avec netteté et avec  
précision, et qu'elle ne s'élève point  
dans cette analyse au delà de ce  
qu'elle conçoit clairement de ces mêmes  
objets; la plus futile, lorsqu'orgueilleuse  
et ténébreuse tout à la fois, elle s'enforce



Dans une region refusée a son  
 regards, qu'elle disserte sur les  
 attributs de Dieu, sur la nature  
 de l'ame, sur la liberté, et sur  
 d'autres sujets de cette espece,  
 ou toute l'antiquité philosophique  
 s'en perdue, et ou la philosophie  
 moderne ne doit pas esperer d'être  
 plus heureuse. C'est de cette  
 science de tenebres qu'un grand  
 Prince disoit il y a peu de temps,  
 Dans une lettre digne d'être lue  
 par tous les philosophes et  
 par tous les Rois; Il ne s'apoint  
 assez de donner en metaphysique;  
nous créons les principes que

79.  
nous appliquons à cette science, et  
ils ne nous servent qu'à nous égarer  
plus méthodiquement; ce qui me  
persuade de plus en plus que la façon  
dont existe l'être suprême, la création  
ou l'éternité de cet univers, la nature  
de ce qui se passe en nous, sont des  
choses qu'il ne nous importe pas  
de connaître, sans quoi nous les  
connoîtrions; pourvu que l'homme  
sache distinguer le bien et le mal, qu'il  
ait un penchant déterminé pour l'un  
et de l'aversion pour l'autre, pourvu  
qu'il soit assez maître de ses passions  
pour qu'elles ne le tyrannisent pas,  
et ne le précipitent point dans l'infor-



-tune, c'est, je crois, assez pour  
 le rendre heureux; le reste de sa  
 connoissance metaphysique,  
 dont on s'efforce en vain d'ar-  
 -racher le secret à la nature,  
 ne nous serviroient qu'à conten-  
 -ter notre curiosité insatiable,  
 autant qu'elle serviroit d'ailleurs  
 inutile à notre usage; l'homme  
 jouit, il en fait pour cela; que  
 lui faut il d'avantage?

Ce n'est donc pas de cette  
 metaphysique couverte de nuages  
 qu'il sera question ici, mais  
 d'une metaphysique plus à

notre portée, plus terre à terre, de  
celle qu'on peut porter dans les  
sciences naturelles, et principalement  
dans la géométrie et les différentes  
parties des mathématiques.

À proprement parler, il n'y a  
point de science qui n'ait sa meta-  
physique, si on entend par ce  
mot les principes généraux sur  
lesquels cette science est appuyée, et  
qui sont comme le germe des vérités  
de détail que renferme cette science;  
principes d'où il faut partir pour  
découvrir de nouvelles vérités, ou  
auxquels il est nécessaire de remonter



pour mettre au creuser les verités  
qu'on croit decouvertes.

Cependant comme le mot  
metaphysique, ne doit s'appli-  
quer proprement et suivant son  
sens veritable, qu'aux objets  
immateriaux, on ne donne point  
proprement de partie metaphysi-  
que aux sciences qui ont des  
objets palpables et sensibles;  
c'est par cette raison que la  
medecine, la pharmacie, la  
botanique, la chimie n'ont  
point de metaphysique; par  
la meme raison la physique

particuliere qui entre dans le detail  
 des propriétés des corps matériels,  
 n'en a pas non plus; mais la  
physique generale en a une, par  
 ce que cette physique a pour objet  
 des choses abstraites, comme l'espace  
 en general, le mouvement et le temps  
 en general, les propriétés generales  
 de la matiere; la Grammaire à de  
 même sa metaphysique, autant  
 qu'elle analyse les idées dont les  
 mots ne sont que les expressions,  
 la musique à la sienne, autant qu'elle  
 remonte aux sources du plaisir que  
 l'harmonie et la melodie nous causent.  
 Enfin la geometrie qui s'occupe comme



la physique generale, des proprietés  
 de l'étendue abstraite, mais de  
 l'étendue en tant que figurée (au  
 lieu que la physique generale  
 la considere en tant que divisible,  
et mobile) la geometrie, des-jé, a  
 aussi sa metaphysique comme  
 la physique generale; c'est de  
 cette dernière metaphysique qu'il  
 est ici principalement question.

En toutes choses, dit la morale  
 pratique, il faut considerer la fin;  
 en toutes choses, dit la saine  
 metaphysique speculative, il faut  
 considerer le principe. Or quel

est le principe de la géométrie? la nature de l'étendue, non pas peut être telle quelle est, mais telle que nous la concevons, c'est à dire comme composée de parties semblables entières, et comme étant susceptible de trois dimensions, que nous pouvons considérer, ou toutes ensemble, ou deux à deux, ou chacune séparément.

Le premier usage de la métaphysique en géométrie, est de donner d'après cette notion des idées claires du solide, de la surface, de la ligne; l'abus seroit de dissertar sur la nature de l'étendue, sur l'existence du point



mathématique, qui n'est qu'un  
 abstraction de l'esprit, sur la  
 nature de la ligne droite qu'il  
 nous est si difficile de bien  
 définir, quoique nous la con-  
 noissons assez par sa propriété  
 principale pour en deduire  
 évidemment toutes les autres.  
 Voyez à ce sujet nos réflexions  
 précédentes sur les élémens  
 de Geometrie.

L'usage et l'abus de la  
 métaphysique en geometrie  
 peuvent aussi se faire sentir tout  
 à la fois dans la manière de traiter  
 certaines questions qui ont partagé

47

les géomètres, par exemple dans  
celle de l'angle de contingence dont  
nous avons parlé plus haut; on verra  
l'abus de la métaphysique dans  
les difficultés dont on s'est trouillé  
cette question, faute d'avoir fixé net-  
tement l'idée qu'on devoit attacher au  
mot angle; on appercevra l'usage de  
la métaphysique dans l'examen de  
la véritable idée qu'on doit attacher à  
ce mot, examen au moyen duquel toute  
cette controverse se réduit à une dispute  
de mots. Nous avons déjà remarqué à  
l'occasion de cette controverse même, que  
ce n'est pas le seul exemple de pareilles  
disputes élevées dans le sein des



mathématiques, et qui au grand  
scandale de l'évidence dont cette  
science se glorifie, on partage  
quelquefois les savaux les plus  
éclairés et les plus célèbres.

A l'usage et l'abus de la  
métaphysique, peuvent encore  
avoir lieu dans la solution de  
certains problèmes; on en découvre  
l'abus en voulant employer les  
raisonnements métaphysiques  
à résoudre des questions pour  
lesquelles nous avons un guide  
plus sûr, le calcul et l'analyse  
qui ne peuvent nous égaler,

au lieu qu'une métaphysique vague  
et hasardée, quelquefois même une  
métaphysique claire et simple en  
apparence, peut nous égare souvent.

Si on demandoit, par exemple, quelle  
est la ligne qu'un corps pesant doit  
décrire pour aller d'un point donné  
à un autre point donné dans le temps  
le plus court qu'il est possible, un  
métaphysicien, surtout s'il avoit  
le malheur d'être un peu géomètre,  
répondroit tout d'un coup et sans  
hésiter, que la ligne qu'on cherche  
est une ligne droite; parce que cette  
ligne étant la plus courte de toutes,



90  
doit par conséquent être parcourue  
en moins de temps qu'aucune autre.

Le métaphysicien se tromperoit;  
une analyse exacte fait voir que  
la ligne cherchée est une courbe. Mais  
que peut faire la métaphysique et  
en quoi consiste ici son véritable  
usage? Elle peut, quand le problème  
est résolu, éclairer l'esprit jusqu'à  
un certain point sur le résultat de  
la solution, dissiper le paradoxe  
auquel cette solution semble conduire,  
faire connaître comment il est  
possible qu'une certaine ligne  
courbe, quoique plus longue que  
la ligne droite, soit néanmoins  
parcourue en moins de temps.

91

La métaphysique peut faire  
encore plus, elle peut même, non pas  
faire trouver la solution des problèmes  
mais faire entrevoir en plusieurs cas,  
la route qu'on doit suivre pour arriver  
à cette solution; elle y parvient, par  
un examen attentif des circonstances  
de la question proposée. Par exemple  
dans celle dont il s'agit, elle nous fait  
connoître que la propriété de la courbe  
de la plus vite descente doit avoir lieu  
non seulement dans la courbe prise  
en total, mais dans chacune de ses  
parties infiniment petites, d'où l'on voit  
que la question se réduit à trouver une  
courbe dont chaque partie infiniment



petite soit parcourue dans un  
 temps plus court que toute autre  
 petite partie de courbe passant  
 par les mêmes extrémités; Ser-  
 lors la voye est, pour ainsi dire,  
 ouverte au calcul, et le problème  
 est réduit à une pareille question  
 d'analyse. On peut voir ce que  
 nous avons dit sur cela dans  
 l'Eloge de Bernoulli, à l'occasion  
 de cette question même, Tome II de  
 nos Mélanges, depuis la page 17  
 jusqu'à la page 28; nous avons  
 tâché d'y exposer tout à la fois  
 l'usage et l'abus qu'on peut  
 faire de la métaphysique dans

cette question, envisagée même sous  
 différents points de vue; un tel  
 exemple sera plus utile pour faire  
 sentir ces abus et cet usage, que  
 des préceptes généraux sans application.

Enfin l'usage et l'abus de la  
 métaphysique en géométrie peuvent  
 surtout avoir lieu dans deux parties  
 considérables de cette dernière science,  
 dans l'application de l'analyse à la  
 géométrie, et dans le calcul infinitésimal.

Nous l'avons déjà dit ailleurs; une  
 métaphysique aussi fine que vraie a  
 présidé à l'invention du calcul algè-  
 bre, de l'application de ce calcul  
 à la géométrie, et surtout du calcul



infinitesimal. Cette metaphysi-  
 que lumineuse et simple, qui  
 a guidé les inventeurs, leur  
 a fait imaginer des signes ou  
 façons abrégées de s'exprimer.  
 Dans lesquelles toute cette meta-  
 physique est pour ainsi dire  
 enveloppée; mais ces signes abrégés  
 ont cela de commode, qu'ils rédui-  
 sent presque toute la science à  
 des opérations purement mecha-  
 niques. Ces opérations sont à la  
 metaphysique qui a guidé les  
 inventeurs, ce que les regles  
 usuelles de la grammaire sont  
 à la metaphysique des idées d'après

lesquelles ces regles ont été établies ;  
 métaphysique qui ne peut être connue  
 et sentie que par les philosophes, au lieu  
 que les regles qui en sont le résultat  
 sont à la portée de la multitude et destinées  
 à son usage. De même dans les arts  
 mécaniques l'esprit, et le génie de  
 l'inventeur se trouve, si on peut parler  
 de la sorte, réduit et concentré dans  
 un petit nombre d'opérations manuelles,  
 d'autant plus admirables, que leur  
 simplicité les met à portée d'être exécu-  
 tées par les mains les plus grossières,  
 par des hommes bien éloignés de se  
 douter de l'esprit qui met leurs doigts  
 en mouvement ; à peu près comme le



corps en guide par une ame  
qu'il ne connoit point.

C'est donc cette metaphysique  
primitive que le philosophe doit  
chercher dans les operations alge-  
briques dans l'application de  
ces operations a la geometrie, et  
dans le calcul infinitesimal.

Pour y parvenir et ne s'égarer  
jamais, il doit toujours avoir devant  
les yeux cette grande verité, que  
la metaphysique qu'il cherche doit  
être aussi simple et aussi lumineuse  
que les operations qui en sont le  
resultat sont surs et faciles, par  
ce qu'il est été impossible que des  
principes obscurs et alambiqués

eusseut conduit à des conséquences<sup>22</sup>  
qui ne le fussent pas.

On trouvera, je pense, ce caractère  
de lumière et de simplicité dans les  
notions métaphysiques que nous  
avons données ci-dessus de la nature  
des opérations algébriques, de celle  
des rapports incommensurables, et  
surtout <sup>de</sup> celle des quantités négatives  
sur laquelle tant de géomètres et de  
philosophes se sont formés des idées  
si fausses.

Mais c'est principalement dans  
le calcul infinitésimal que l'usage et  
l'abus de la métaphysique peuvent



se faire également sentir. Nous  
 le disons avec peine, et sans  
 vouloir outrager les manes d'un  
 homme célèbre qui n'est plus, il  
 n'y a peut-être point d'ouvrage où  
 l'on trouve des preuves plus fré-  
 quentes de l'abus dont nous parlons,  
 que dans l'ouvrage bien connu de  
 M. Defontenelle qui a pour titre,  
éléments de la géométrie de l'infini;  
 ouvrage dont la lecture est d'autant  
 plus dangereuse aux jeunes géo-  
 mètres, que l'auteur y présente ses  
 sophismes avec une sorte d'élégance,  
 et pour ainsi dire de grace dont le  
 sujet ne paroissoit pas susceptible.

Il semble que les ouvrages géométriques  
 de ce philosophe soient destinés à produire  
 sur les jeunes gens qui entrent dans  
 la carrière des sciences, le même effet  
 que ses ouvrages de belles lettres sur  
 les jeunes littérateurs, celui d'égarer  
 les uns et les autres par des défauts  
 d'autant plus propres à séduire, qu'ils  
 se trouvent et agréables par eux mêmes  
 et joints d'ailleurs à des beautés  
 réelles. La grande source des erreurs  
 de M. de Fontenelle est d'avoir voulu  
 réaliser l'infini, et conséquemment  
 en faire la base réelle de ses calculs;  
 au lieu de le regarder ainsi que



nous l'avons fait \* comme la  
limite à laquelle le fini ne peut  
jamais atteindre, et de chercher  
dans cette notion si simple et si  
vraie l'explication des paradoxes  
que les résultats de ce calcul  
semblent présenter. Voici le rei-  
-sommement de l'illustre secrétaire  
de l'Académie des sciences pour  
établir l'existence réelle de la  
grandeur infinie; la grandeur,  
dit-il, est susceptible d'augmentation  
sans fin. Elle n'est donc pas

\* Voyez l'éclaircissement sur les principes  
métaphysiques du calcul infinité-  
simal.

et ne peut être supposée dans le même  
 cas, que si elle n'étoit pas susceptible  
 d'augmentation sans fin; or si elle n'étoit  
 pas susceptible d'augmentation sans  
 fin, elle resteroit toujours finie; donc  
 étant susceptible d'augmentation  
 sans fin, elle peut être supposée infinie.

Il est aisé de répondre que la différence  
 entre la grandeur susceptible d'augmenta-  
 tion sans fin; et la grandeur qui ne le  
 seroit pas, ne consiste point en ce que  
 la seconde resteroit toujours finie, au lieu  
 que la première peut être supposée infinie;  
 mais en ce que la seconde reste finie  
 sans pouvoir passer certaines limites,  
 au lieu que la 1.<sup>re</sup> peut être supposée aussi  
 grande qu'on voudra, en demeurant



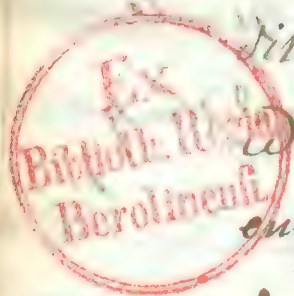
neanmoins toujours finie.

Aussi qu'elle a été le fruit du  
 principe Hazardé d'ou notre illustre  
 philosophe est parti? De le mener  
 à des conséquences dont l'absurdité  
 auroit du lui ouvrir les yeux sur  
 ce principe même; il donne par  
 exemple, pour réellement existantes  
 des quantités qu'il appelle finies  
indéterminables, et qui ne sont  
 selon lui, ni finies, ni infinies;  
 comme si de pareilles quantités  
 n'étoient pas un véritable être.  
 De raison donc il est impossible  
 de se former même l'idée; il est  
 vrai que cette conclusion absurde  
 est la suite nécessaire du principe.

que la grandeur peut être supposée  
 infinie; car il est clair que dans son  
 passage d'un fini à l'infini, qui ne  
 sauroit être un passage brusque, elle  
 ne peut être ni finie ni infinie; c'est  
 encore en vertu du même principe, que  
 M. de Fontenelle a distingué différents  
 ordres d'infini et d'infiniment  
 petits, qui n'existent par plus les  
 uns que les autres; qu'il a distingué  
 de même deux espèces d'infini, l'in-  
 fini métaphysique et l'infini géomé-  
 trique, aussi chimeriques l'un que  
 l'autre, quand on voudra leur attribuer  
 une existence réelle.



Vous avons taché d'au- l'éclair-  
 -cissement particulier sur les prin-  
 -cipes du calcul infinitesimal,  
 d'exposer la vraie métaphysique  
 qui sert de base à ces principes,  
 et à laquelle nous n'avons rien à  
 ajouter ici; cette métaphysique, et  
 celle que nous avons taché de repa-  
 -rer dans tout ce que nous avons  
 dit ci dessus, peuvent donner une  
 idée suffisante de celle qui doit être  
 employée en géométrie, et de celle qui  
 doit y être proscrire. Heureux si par  
 ces différentes réflexions nous  
 avons rempli notre objet, et répondu  
 aux desirs du grand Prince qui  
 nous a proposé ces questions.



lair-

-

e

,

r

et

ran-

te

ui

o

e

.









